



GARA NAZIONALE MERCURIO

A.S. 2009/2010

Prova di

MATEMATICA

È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.

La durata della prova è di due ore e trenta minuti.



Punti totali 30

I risultati di ciascun quesito vanno brevemente motivati.

Quesito 1 (punti 3)

Considerare la funzione di espressione analitica $f(x) = \ln(4x^2 - 4x + 2 - k)$ con $k \in \mathbb{R}$.

Determinare i valori di k in modo che il dominio della funzione sia \mathbb{R} . Successivamente determinare k in modo che il dominio sia $\mathbb{R} - \{\alpha\}$, essendo α un opportuno numero reale da determinarsi.

Quesito 2 (punti 3)

Servendosi della definizione di limite verificare che risulta:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{2})^x = 1$$

Quesito 3 (punti 8)

Studiare e rappresentare la funzione $f(x) = x - 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$

Individuare, se esiste, un intervallo della funzione in cui sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Rolle.

Quesito 4 (punti 3)

Calcolare i seguenti limiti

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{2 \ln x} =$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{3 + x^2}}{2 - 3x} =$

Quesito 5 (punti 2)

Data la funzione

$$f(x) = ax^3 + 3x^2 + b$$

determinare i valori dei parametri a e b in modo che la curva rappresentativa della funzione attraversi l'asse delle x nel punto di ascissa $x=3$ ed ivi risulti tangente alla retta di coefficiente angolare $m=-9$.



Quesito 6 (punti 3)

Dire per quali valori del parametro a il sistema lineare

$$\begin{cases} ax + y + 3z = 3 \\ x - z = -2 \\ 2x + ay + 2z = 2 \end{cases}$$

ammette soluzioni.

Quesito 7 (punti 5)

a) Un dado non è equilibrato e si sa che la probabilità che esca ogni faccia è, per ogni faccia, proporzionale al suo punteggio. Determinare la probabilità per ognuna delle facce e la probabilità che esca un numero maggiore di 3.

b) Tre scatole A, B e C contengono lampade prodotte da fabbriche diverse di cui alcune sono difettose. La scatola A contiene 2000 lampade con il 5% di esse difettose, B ne contiene 500 con il 20% difettose e C 1500 con il 10% difettose. Si sceglie una scatola a caso e si estrae a caso una lampada, qual è la probabilità che sia difettosa? Sapendo che è difettosa calcolare la probabilità che provenga dalla scatola C.

Quesito 8 (punti 3)

Una persona ha preso in prestito 5 anni fa € 18.500 convenendo il rimborso del montante dopo 9 anni al tasso annuo composto del 4%. Oggi si accorda con il creditore di saldare anticipatamente il debito versando due somme la prima fra un anno e 6 mesi e la seconda di importo doppio della prima fra due anni.

Calcolare, in capitalizzazione composta, l'importo delle due somme se il tasso di valutazione è il tasso nominale annuo convertibile quadrimestralmente del 4,2%.